Μάθημα 16

Θεώρημα Η f είναι μετρήσιμη αν-ν μια από τις ακόλουθες ισχύει

(i) $\forall a \in \mathbb{R} \quad \{x : f(x) \geq a\} \in \mathcal{M}$

(ii) $\forall a \in \mathbb{R} \quad \{x : f(x) < a\} \in \mathcal{M}$

(iii) $\forall a \in \mathbb{R} \quad \{x : f(x) \leq a\} \in \mathcal{M}$

Απόδειξη Παρατηρούμε πρώτα ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} [a+\frac{1}{n}, +\infty] = (a, +\infty]$ και $\bigcap_{n=1}^{\infty} (a-\frac{1}{n}, +\infty] = [a, +\infty]$. Οπότε

$$\{x : f(x) \geq a\} = f^{-1}([a, +\infty]) = f^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (a-\tfrac{1}{n}, +\infty]\right)$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left((a-\tfrac{1}{n}, +\infty]\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : f(x) > a - \tfrac{1}{n}\} \in \mathcal{M}$$

Αυτό αποδεικνύει το «μετρήσιμη $\Rightarrow$ (i)».

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\quad \{x : f(x) < a\} = \{x : f(x) \geq a\}^c \in \mathcal{M}$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\quad \{x : f(x) \leq a\} = f^{-1}([-\infty, a]) =$

$$= f^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} [-\infty, a+\tfrac{1}{n})\right) = \ldots\ldots$$ (άσκηση όμοια με το προηγούμενο)

(iii) $\Rightarrow$ f μετρήσιμη : $\quad \{x : f(x) > a\} = \{x : f(x) \leq a\}^c \in \mathcal{M}$ ∎

Ορισμός Στο $\tilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ κάνουμε τη σύμβαση

$$0 \cdot (+\infty) = 0 \cdot (-\infty) = (+\infty) \cdot 0 = (-\infty) \cdot 0 = 0$$

Οι πράξεις $(+\infty)-(+\infty)$, $(-\infty)-(-\infty)$, $(+\infty)+(-\infty)$, $(-\infty)+(+\infty)$ παραμένουν απροσδιόριστες, καθώς και η διαίρεση με το μηδέν. Έτσι οι $f+g$, $f-g$, f/g δεν ορίζονται πάντα.

οι $f\cdot g$, $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$ $\quad f_+=\max\{f,0\}$ $\quad f_-=\min\{f,0\}$

κ $|f|$ ορίζονται πάντα.

~~Λήμμα~~ Αν $f: A\to\tilde{\mathbb{R}}$ μετρήσιμη τότε $\forall a\in\tilde{\mathbb{R}}$ το $f^{-1}(\{a\}) =$

$$= \{x : f(x)=a\}$$ είναι μετρήσιμο

<u>Απόδειξη</u> Αν $a\in\mathbb{R}$, τα $\{x: f(x)\ge a\}$ κ $\{x: f(x)\le a\}$

είναι μετρήσιμα άρα $\{x:f(x)=a\}=\{x:f(x)\ge a\}\cap\{x: f(x)\le a\}\in\mathcal{M}$

Αν $a=+\infty$ τότε $\{x: f(x)=a\} =$

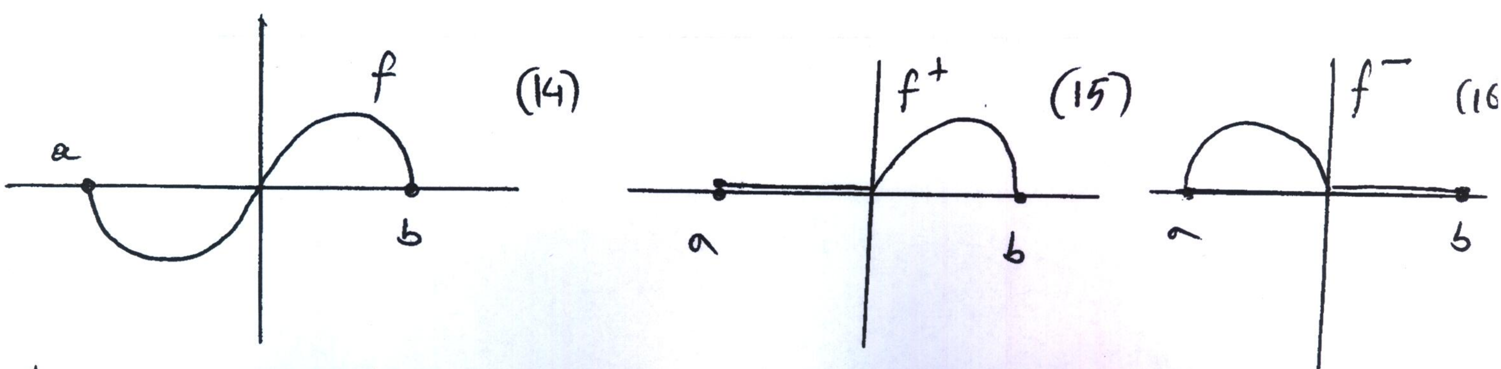
$$= \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x : f(x)>n\} \in\mathcal{M}$$

Αν $a=-\infty$ τότε $\{x: f(x)=-\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x: f(x)<-n\}\in\mathcal{M}$

<u>Ορισμός</u> $\forall f: A\to\mathbb{R}$ ορίζουμε τις $f^+, f^- : A\to[0,\infty)$

$$f^+(x)=\max\{f(x),0\}=\begin{cases} f(x) & \text{αν } f(x)\ge 0\\ 0 & \text{αν } f(x)<0\end{cases}$$

$$f^-(x)=\max\{-f(x),0\}=\begin{cases} -f(x) & \text{αν } f(x)\le 0\\ 0 & \text{αν } f(x)>0\end{cases}$$



Φανερά $f=f^+-f^-$ κ $|f|=f^++f^-$

f^+ «θετικό μέρος» της f κ f^- «αρνητικό μέρος» της f

Επιπλέον $\dfrac{f+|f|}{2} = f^+$ και $\dfrac{|f|-f}{2} = f^-$ (1)

Θεώρημα Αν f,g μετρήσιμες $(f,g: A\to\mathbb{R})$ και $\lambda\in\mathbb{R}$ τότε οι συναρτήσεις (2)

(i) $f+g$ (ii) λf (iii) f^2, $|f|$ (iv) fg (v) $\max\{f,g\}$, (3)

(vi) $\min\{f,g\}$, (vii) f^+, f^-, (4)

είναι όλες μετρήσιμες (5)

Απόδειξη (i) Ισχυρισμός $f(x)+g(x)>a \iff \exists\, r\in\mathbb{Q}$ ώστε (6)

$f(x)>r,\ g(x)>a-r$ (7)

["$\Leftarrow$" προφανής αφού $f(x)+g(x) > r+(a-r) = a$ (8)

"$\Rightarrow$" Αφού $f(x)+g(x)>a \Rightarrow \begin{cases} f(x)\neq -\infty \\ g(x)\neq -\infty \end{cases}$ (9) (10)

Άρα $f(x) > a - g(x) \Rightarrow \exists$ ρητός r ανάμεσα: (11)

(12)

$f(x) > r > a-g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x)>r \\ g(x)>a-r \end{cases}$] (13)

Συνεπώς $\{x: (f+g)(x)>a\} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \left(\{x: f(x)>r\}\cap\{x: g(x)>a-r\}\right)$ (14)

$\in \mathcal{M}$ (15)

(ii) Αν $\lambda=0 \Rightarrow \lambda f = 0$ μετρήσιμη (γιατί;) (16)

Αν $\lambda>0 \Rightarrow \{x: (\lambda f)(x)>a\} = \{x: f(x)>\frac{a}{\lambda}\}\in\mathcal{M}$ (17)

Αν $\lambda<0 \Rightarrow \{x: (\lambda f)(x)>a\} = \{x: f(x)<\frac{a}{\lambda}\}\in\mathcal{M}$ (18)

(iii) $\{x: (f(x))^2>a\} = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{αν } a<0 \\ \{x: f(x)>0\}\cup\{x: f(x)<0\} & \text{αν } a=0 \\ \{x: f(x)>\sqrt{a}\}\cup\{x: f(x)<-\sqrt{a}\} & \text{αν } a>0 \end{cases} \in\mathcal{M}$ (19) (20) (21)

Ομοίως για την $|f|$ (22)

(23)

(iv) Θέτω $B_1=\{x : f(x)=+\infty\} \cap \{x : g(x)=-\infty\}$

$B_2=\{x : f(x)=-\infty\} \cap \{x : g(x)=+\infty\}$

$B_3=\{x : f(x)=+\infty\} \cap \{x : g(x)=+\infty\}$

$B_4=\{x : f(x)=-\infty\} \cap \{x : g(x)=-\infty\}$

$B_1, B_2, B_3, B_4 \in \mathcal{M}$ και $B := B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \in \mathcal{M} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{M}$

Θέτω $f_1 = f|_{A\setminus B}$ $\quad g_1 = g|_{A \setminus B}$ Τότε f_1, g_1 μετρήσιμες ⊛

$$f_1 g_1 = \frac{1}{2}\left((f_1+g_1)^2 - f_1^2 - g_1^2 \right)$$

[⊛ $\{x \in A\setminus B : f_1(x) > a\} = \{x \in A : f(x) > a\} \setminus B \in \mathcal{M}$]

Άρα $f_1 \cdot g_1$ μετρήσιμη

Τέλος $\{x \in A : (fg)(x) > a\} = \{x \in A \setminus B : (f_1 g_1)(x) > a\} \cup B_3 \cup B_4 \in \mathcal{M}$

Άρα fg μετρήσιμη

(v) $\{x : \max\{f,g\}(x) > a\} = \{x : f(x) > a\} \cup \{x : g(x) > a\}$
$\in \mathcal{M}$

$\{x : \min\{f,g\}(x) > a\} = \{x : f(x) > a\} \cap \{x : g(x) > a\}$
$\in \mathcal{M}$

(vi) ομοίως με το (v).