

Ασκήσεις-Φυλλάδιο 1^ο

7 Μαρτίου 2018

Παράδοση: Δευτέρα 12 Μαρτίου

1. Έστω ότι $\mathcal{A} = \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$. Αποδείξτε ότι η σ -άλγεβρα που παράγει η \mathcal{A} είναι η Borel σ -άλγεβρα του \mathbb{R} .
2. Θέτουμε \mathcal{J} για την οικογένεια όλων των υποδιαστημάτων του $[0, 1]$ και \mathcal{B}_1 για την οικογένεια όλων των πεπερασμένων και αριθμήσιμων ενώσεων στοιχείων της \mathcal{J} . Αποδείξτε ότι η \mathcal{B}_1 δεν είναι σ -άλγεβρα. (Ελέγξτε αν το σύνολο Cantor ανήκει στην \mathcal{B}_1 .)
3. Υποθέστε ότι η απεικόνιση $\mu : \mathcal{J} \rightarrow [0, 1]$ (\mathcal{J} όπως στην άσκηση 2) ικανοποιεί την

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^N D_n\right) = \sum_{n=1}^N \mu(D_n)$$

όταν τα $D_n \in \mathcal{J}$ είναι ξένα. Υποθέστε ότι όταν $A_n \in \mathcal{J}$, $A_{n+1} \subseteq A_n$ και $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$. Αποδείξτε ότι αν τα D_n είναι ξένα σύνολα της \mathcal{J} που ικανοποιούν την $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathcal{J}$ τότε

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_n).$$

4. Έστω ότι τα $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$ είναι υποσύνολα του δυναμοσυνόλου $\mathcal{P}(X)$ κάποιου συνόλου X και $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$.
(α) Αν κάθε \mathcal{F}_n είναι σ -άλγεβρα δείξτε ότι και η οικογένεια $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ είναι επίσης σ -άλγεβρα.
(β) Αν κάθε \mathcal{F}_n είναι σ -άλγεβρα δείξτε ότι η οικογένεια $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ δεν είναι απαραίτητα σ -άλγεβρα.
5. Θέτουμε $X = [0, 1]$ και $X' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1, 0 < y \leq 1\}$ (κάντε σχήμα). Επίσης θέτουμε

$$\mathcal{F} = \{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A, 0 < y \leq 1\} : A \in \mathcal{L}\},$$

όπου \mathcal{L} η σ -άλγεβρα των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων στο X . Ορίζουμε $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ με

$$P\left(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A, 0 < y \leq 1\}\right) = \lambda(A),$$

όπου λ το μέτρο Lebesgue στο X . Έστω ότι το P^* είναι το εξωτερικό μέτρο που ορίζεται από το P και την \mathcal{F} στο X' . Θεωρήστε το σύνολο $S \subseteq X'$ με

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1, y = 1/2\}.$$

Ισχύει $S \in \mathcal{F}$; Αποδείξτε ότι $P^*(S) = 1$ και $P^*(S^c) = 1$. Αποφασίστε αν το S είναι μετρήσιμο σύνολο για το μέτρο που δίνει το P^* μέσω του θεωρήματος Καραθεοδωρή.

6. Έστω ότι το λ είναι το μέτρο Lebesgue στο $[0, 1] \times [0, 1]$ (δηλαδή ορίζουμε το μέτρο του $[a, b] \times [c, d]$ να είναι ίσο με $(b-a)(d-c)$), ορίζουμε με αυτό εξωτερικό μέτρο στο $[0, 1] \times [0, 1]$ και στη συνέχεια μέτρο μέσω του θεωρήματος Καραθεοδωρή). Δείξτε ότι το σύνολο

$$A = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y < x\}$$

είναι μετρήσιμο και υπολογίστε το $\lambda(A)$.