

Ασκήσεις-Φυλλάδιο 2^ο

14 Μαρτίου 2018

Παράδοση: Δευτέρα 19 Μαρτίου

1. Υπολογίστε το $\int_0^1 x^n \log x dx$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και υπολογίστε το

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1-x} dx$$

χρησιμοποιώντας το θεώρημα Berro-Levi. (Δίνεται ότι $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$. Υπόδειξη: $1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots = ;$)

2. Δίνεται η συνάρτηση $\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$ και $a > 0$. Για ποιες τιμές του $s \in \mathbb{C}$ είναι η συνάρτηση $f(x) = x^s e^{-ax}$ ολοκληρώσιμη στο $[0, \infty)$; Υπολογίστε το ολοκλήρωμά της σε σχέση με τη συνάρτηση Γ . Δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx.$$

(Υπόδειξη 1: είναι σωστό ότι f ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν $|f|$ ολοκληρώσιμη; Υπόδειξη 2: $1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots = ;$)

3. Δείξτε ότι

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}.$$

4. Θεωρήστε τον \mathbb{R}^n εφοδιασμένο με το μέτρο Lebesgue $(= (\mathbb{R}, L, \mu)^n)$. Έστω ότι $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και $K \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές.

(α) Αποδείξτε ότι

$$\lim_{\|z\|_2 \rightarrow \infty} \int_{K+z} |f(x)| dx = 0.$$

(Υπόδειξη: βρείτε πρώτα το $\lim_{r \rightarrow \infty} \chi_{\{x: \|x\|_2 \geq r\}}(y) f(y)$.)

- (β) Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο \mathbb{R}^n και η $|f|^p$ είναι ολοκληρώσιμη για κάποιο $p > 0$ αποδείξτε ότι

$$\lim_{\|x\|_2 \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

(Αν όχι τότε υπάρχει $\|x_n\|_2 \rightarrow \infty$ και $|f(x_n)| \geq \epsilon$ για κάθε n . Αυτό, η ομοιόμορφη συνέχεια στα x_n και το σκέλος (α) της άσκησης θα δώσουν αντίφαση).